Clase 4

Fuerza eléctrica

Ejemplo 5: Se tiene un segmento de longitud $2a$ cargado con una densidad lineal de carga λ. Una carga puntual q se encuentra a una distancia b medida perpendicularmente desde el punto medio del segmento. ¿Cual es la fuerza que ejerce el segmento sobre la carga?

Conviene escoger el sistema de coordenadas con su centro en el punto medio del segmento y su eje y en la dirección del segmento. La carga q qued en la posición b sobre el eje x. Llamemos y' a la posición sobre el eje y de un elemento infinitesimal de carga dq'. Entonces $\vec{\mathbf{r}} = b\hat{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{r'}} = y'\hat{\mathbf{y}}$. Nos podemos dar cuenta que en este caso $dl = dy'$ por lo que $dq = \lambda dy'$. Sustituyendo el elemento de fuerza que ejerce dq' sobre q viene dado por,

$$d\vec{\mathbf{F}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{b^2 + y'^2}}(b\hat{\mathbf{x}} - y'\hat{\mathbf{y}})dy' \ .$$

La fuerza total es,

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{(b\hat{\mathbf{x}} - y'\hat{\mathbf{y}})}{\sqrt{(b^2 + y'^2)^3}}dy' \ .$$

La componente x de la fuerza queda,

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{b}{\sqrt{b^2 + y'^2)^3}}dy' \\ &= \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{y'}{b^2\sqrt{b^2 + y'^2}}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{q\lambda a}{2\pi\epsilon_0 b\sqrt{b^2 + a^2}} \ . \end{aligned}$$

En el límite en que el alambre es muy largo,

$$\lim_{a\to\infty} F_x \to \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 b} \tag{1}$$

La componente y de la fuerza queda,

$$F_x = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{b}{\sqrt{b^2 + y'^2)^3}}dy' = 0 \ .$$

ya que el integrando es impar. Que $F_y = 0$ puede verse también directamente haciendo una representación gráfica de $d\vec{\mathbf{F}}$ y teniendo en cuenta la simetría del problema.

El campo eléctrico y las líneas de campo

El campo eléctrico

Hemos visto que el principio de superposición permite escribir expresiones explícitas para la fuerza que una distribución de cargas ejerce sobre un carga de prueba q_p. Dichas expresiones resultan ser proporcionales al valor de la carga q_p. Si la carga q_p es pequeña podemos suponer que no afecta o afecta muy débilmente a la distribución de cargas y describir a ésta por el efecto que produce sobre todos los puntos del espacio independientemente de las cargas de prueba. Este efecto se describe convenientemente definiendo un campo vectorial $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$, el campo eléctrico que representa la fuerza por unidad de carga en cada punto dado por,

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \lim_{q_p \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_p} \ .$$

Entonces podremos calcular la fuerza sobre una carga q_p en la posición $\vec{\mathbf{r}}$ como $\vec{\mathbf{F}} = qp\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$.

El campo eléctrico debido a una carga puntual q en la posición $\vec{\mathbf{r_0}}$,

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|^3} \ .$$

En el caso particular en que la carga esta situada en el origen, $\vec{\mathbf{r_0}} = 0$ y tenemos

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^2} \ .$$

Cálculo del campo eléctrico

El principio de superposición permite calcular el campo eléctrico producido por un sistema de cargas.

<u>Sistema de cargas puntuales</u>

El campo eléctrico producido por n cargas q_1, q_2,...,q_n en las posiciones $\vec{\mathbf{r_1}}$, $\vec{\mathbf{r_2}}$...$\vec{\mathbf{r_n}}$ en el punto $\vec{\mathbf{r}}$ es

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{(\vec{\mathbf{r_j}} - \vec{\mathbf{r_i}})}{|\vec{\mathbf{r_j}} - \vec{\mathbf{r_i}}|^3} \quad .$$

Densidad volumétrica de carga

Para una sistema con una densidad de carga $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ distribuida en una región Ω del espacio tenemos,

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|^3}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}})dV'$$

Densidad superficial de carga

Para una sistema con una densidad superficial de carga $\sigma(\vec{\mathbf{r}})$ distribuida en una superficie S del espacio el campo eléctrico en el punto $\vec{\mathbf{r}}$ se calcula según,

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|^3}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}})dS'$$

Densidades lineales de carga

Para una sistema con una densidad lineal de carga $\lambda(\vec{\mathbf{r}})$ distribuida sore una curva C del espacio el campo eléctrico en el punto $\vec{\mathbf{r}}$ viene dado por,

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|^3}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}})dl'$$

Cálculo de los elementos de línea, superficie y volumen

Elementos de línea

Para calcular el elemento de línea en una dada configuración de carga lineal parametrizamos la curva con un parámetro τ en un determinado sistema de coordenadas en la forma $\vec{\mathbf{r}}'(\tau) = x(\tau)\hat{\mathbf{x}} + y(\tau)\hat{\mathbf{y}} + z(\tau)\hat{\mathbf{z}}$. Para dos puntos cercanos tenemos,

$$\Delta\vec{\mathbf{l'}} = \vec{\mathbf{r}}'(\tau + \Delta\tau) - \vec{\mathbf{r}}'(\tau)$$

Multiplicando y dividiendo por $\Delta\tau$ en el límite tendremos,

$$d\vec{\mathbf{l'}} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}'(\tau + \Delta\tau) - \vec{\mathbf{r}}'(\tau)\Delta\tau}{\Delta\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}'(\tau)}{d\tau}d\tau$$

Aquí $d\vec{\mathbf{l}}'$ es un vector tangente a la curva de longitud infinitesimal $dl' = |d\vec{\mathbf{l}}'|$. Por ejemplo, para la longitud de la curva tendremos,

$$L = \int_C dl' = \int_C \sqrt{d\vec{\mathbf{l}}'.d\vec{\mathbf{l}}'} = \int_C \sqrt{\frac{d\vec{\mathbf{r}}'(\tau)}{d\tau}.\frac{d\vec{\mathbf{r}}'(\tau)}{d\tau}}d\tau$$

La carga total de una configuración lineal de carga λ sobre una curva C es,

$$Q_C = \int_C \lambda(\vec{\mathbf{r}}')\sqrt{\frac{d\vec{\mathbf{r}}'(\tau)}{d\tau}.\frac{d\vec{\mathbf{r}}'(\tau)}{d\tau}}d\tau$$

Ejemplo 6: Una circunferencia de radio R en el plano xy, centrada en el origen del sistema de coordenadas tiene una densidad de carga lineal $\lambda(\phi) = k\cos^2(\varphi)$ con $\varphi \in (0, 2\pi)$ el ángulo polar. Encontrar la carga total.

Naturalmente escogemos como parámetro el ángulo polar φ y la parametrización queda en la forma $\vec{\mathbf{r}}'(\varphi) = Rcos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + Rsen(\varphi)\hat{\mathbf{y}}$. Entonces, $|\frac{d\vec{\mathbf{r}}'(\varphi)}{d\varphi}| = R$ es constante. La longitud del elemento de línea es $dl' = Rd\varphi$. Para la longitud de la curva obtenemos

$$L = \int_C dl' = \int_0^{2\pi} Rd\varphi = 2\pi R$$

Para la carga tendremos,

$$Q = \int_0^{2\pi} \lambda(\varphi)Rd\varphi = \int_0^{2\pi} k\cos^2(\varphi)Rd\varphi = k\pi R$$